CHƯƠNG 3. DÃY SỐ – CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

§1. Phương pháp quy nạp toán học

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương của n , ta thực hiện hai bước sau :

- Bước 1 : Chứng minh A(1) đúng .
- Bước 2 : Với $\forall x \in Z^+$, chứng minh nếu A(k) đúng thì A(k + 1) cũng đúng .

B. Giải Toán .

Ví dụ 1 : Chứng minh với mọi số nguyên dương , ta luôn có :
$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ (1)

Giải : Chú ý vế trái (VT) có n số hạng . n = 1 : VT = 1 , n = 2 : VT = 1 + 3 . . .

- Với n = 1: (1) ⇔ $1 = 1^2$: mệnh đề này đúng . Vậy (1) đúng khi n = 1.
- Giả sử (1) đúng khi n = k ⇔ $1 + 3 + 5 + . . . + (2k – 1) = k^2$ (2) , ta chứng minh (1) cũng đúng khi n = k + 1 ⇔ $1 + 3 + 5 + . . .+ (2k – 1) + [2(k+1) – 1] = (k + 1)^2$ (3)

Thật vậy : $VT_{(3)} = VT_{(2)} + [2(k+1) – 1] = VP_{(2)} + [2k + 1]$
$= k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$
$= VP_{(3)}$ (đpcm)

Theo phương pháp quy nạp , (1) đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 2 : Chứng minh rằng số $a_n = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ (1) với mọi số nguyên dương n .

Giải :

- Với n = 1 : (1) ⇔ $a_1 = \frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$: đúng . Vậy (1) đúng khi n = 1 .
- Giả sử (1) đúng khi n = k ⇔ $a_k = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$ (2) , ta chứng minh (1) cũng đúng khi n = k + 1 ⇔ $a_{k+1} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+....+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$.

Thậy vậy : $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (theo giả thiết quy nạp (2))

$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$

$= \frac{k+1}{k+2}$ (đpcm)

Vậy (1) đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 3 : Chứng minh số $u_n = 13^n – 1$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên dương n (1)

Giải :

- Với n = 1 : $u_1 = 13^1 – 1 = 12$ chia hết cho 6 . Vậy (1) đúng khi n = 1

Chương 3.Dãy số - Cấp số cộng . - Cấp số nhân

- Giả sử (1) đúng khi n = k ⇔ $u_k = 13^k - 1$ chia hết cho 6 , ta chứng minh (1) cũng đúng khi n = k + 1 ⇔ $u_{k+1} = 13^{k+1} - 1$ chia hết cho 6 .

Thật vậy : $u_{k+1} = 13^{k+1} - 1 = 13.13^k - 1 = 13(13^k - 1) + 12 = 13u_k + 12$. Vì u_k chia hết cho 6 và 12 chia hết 6 nên u_{k+1} chia hết cho 6 (tổng hai số chia hết cho 6 là một số
chia hết cho 6) .

C. Bài Tập Rèn Luyện

3.1. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có :

a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1.4 + 2.7 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$

3.2. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có :

a) $\dfrac{1}{1.3} + \dfrac{1}{3.5} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

b) $1.n + 2(n - 1) + \ldots + (n - 1).2 + n.1 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

c) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

3.3. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có :

a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ với x > - 1 .

b) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \leq n+1$ c) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n + b^n}{2}$ với $a \geq 0 , b \geq 0$.

c) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$

3. 4. Chứng minh với mọi số nguyên dương n , ta có :

a) $u_n = 6^{2n} + 10.3^n$ chia hết cho 11 .

b) tích của 4 số nguyên dương liên tiếp chia hết cho 24 .

c) $6^n + 8^n$ chia hết cho 14 khi n lẻ

d) $u_n = 5.\ 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ chia hết cho 19 .

3.5. Theo một truyện cổ , trong một hang động tại một nơi nào đó , có một vị thần đang thực hiện một công việc buồn tẻ như sau . Trước mặt ông ta là ba mâm vàng . Trên mâm thứ nhất có một tháp tạo bởi 64 dĩa kim cương có lỗ ở giữ . Các dĩa có kích thước khác nhau đặt chồng lên nhau xuyên qua một thanh ngọc sao cho dĩa trên luôn nhỏ hơn dĩa sát bên dưới . Mâm thứ hai và mâm thứ ba cũng có một thanh ngọc ở giữa .Công việc của vị thần là dời tháp dĩa kim cương từ mâm thứ nhất sang mâm thứ ba theo quy tắc sau :

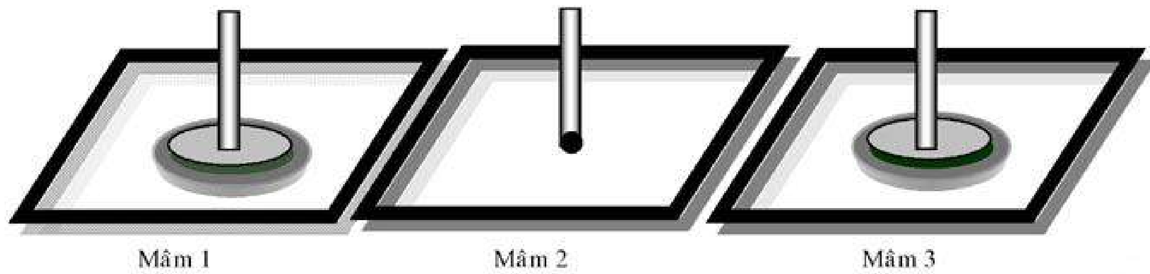
- Mỗi lần chỉ được dời một dĩa .
- Lúc nào dĩa ở trên cũng nhỏ hơn diã bên dưới
- Có thể đặt dĩa đang dời tạm trên mâm thứ hai , nhưng cũng theo luật là dĩa trên nhỏ hơn dĩa dưới .

Thí dụ với tháp 2 dĩa , gọi dĩa 1 là dĩa nhỏ , dĩa 2 là dĩa lớn , ta thực hiện các bước sau :

- Dời dĩa 1 vào mâm 2 .
- Dời dĩa 2 vào mâm 3 .
- Dời dĩa 1 từ mâm 2 vào mâm 3 .

Ta cần tất cả 3 động tác để hoàn tất .

Chương 3.Dãy số - Cấp số cộng . - Cấp số nhân



Chứng minh rằng vị thần cần 2^{64} - 1 động tác để hoàn tất công việc . Giả sử mỗi động tác kéo dài đúng 1 giây , hỏi cần bao nhiêu thời gian để chấm dứt công việc . Truyền thuyết kể rằng khi việc dời 64 dĩa được hoàn tất thì đó cũng là ngày tận thế của lòai người .

D.Hướng dẫn – Đáp số .

3.1. a) * Với n = 1 : VT = VP = 1 => mệnh đề đúng khi n = 1 .

* Giả sử : $1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$, thế thì :

$$1 + 2 + ... + k + \mathbf{(k + 1)} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$ => mệnh đề đúng khi n = k + 1

b) * Với n = 1 : VT = $1^2 = 1$, VP = $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

* Giả sử $1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

=> $1^2 + 2^2 + ... + k^2 + \mathbf{(k+1)^2} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

=> mệnh đề đúng khi n = k + 1 .

c) * Với n = 1 : VT = $\frac{1}{3}$ = VP = $\frac{1}{2.1+1}$

* Giả sử $1.4 + 2.7 + ... + k(3k + 1) = k(k + 1)^2$

=> $1.4 + 2.7 + ... + k(3k + 1) + \mathbf{(k + 1)[3\{k+1) + 1]} = k(k + 1)^2 + (k + 1)(3k + 4)$

$= (k + 1)(k^2 + k + 3k + 4)$

$= (k + 1)(k + 2)^2$

=> mệnh đề đúng khi n = k + 1 .

3.2. a) * Với n = 1 : VT = $\frac{1}{1.3}$ = VP = $\frac{1}{2+1}$

* Giả sử $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

=> $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(2k+1)(2k+3)}}=\frac{k}{2k+1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{(2k+1)(2k+3)}}$

$=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$ => mệnh đề đúng khi n = k + 1

b) * Với n = 1 : VT = 1.1 = 1 , VP = $\frac{1}{6}$.1.2.3 = 1

* Giả sử 1.k + 2(k – 1) + . . .+ (k – 1).2 + k. 1 = $\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$ (1)

Ta phải chứng minh : 1.(k+1) + 2. k + 3.(k – 1) +. . . + k. 2 + (k + 1).1 = $\frac{1}{6}.(k+1)(k+2)(k+3)$ (2)

Lấy (2) – (1) vế với vế : (k+1) + k + (k – 1) +. . . + 2 +1 =

$\frac{1}{6}.(k+1)(k+2)(k+3)$ - $\frac{1}{6}k.(k+1)(k+2)$ (3)

VT(3) = $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (theo bài 3. 1 . a)

VP(3) = $\frac{1}{6}.(k+1)(k+2)(k+3-k)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Vậy ta có dpcm .

c) Giả sử : $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+...+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$

=> $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+...+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=\left(2-\frac{k+2}{2^k}\right)+\frac{k+1}{2^{k+1}}$

= 2 - $\frac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}$

= 2 - $\frac{k+3}{2^{k+1}}$ => mệnh đề đúng khi n = k + 1

3.3. a) * Với n = 1 : VT = VP = 1 + x . Vậy mệnh đề đúng khi n = 1 .

* Giả sử $(1+x)^k \geq 1+kx$ (1) => $(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k \geq (1+x)(1+kx)$ (nhân hai vế của (1) cho 1 + x > 0)

Suy ra : $(1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2 \geq 1+kx+x$ (vì $kx^2 \geq 0$)

Hay $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$ => mệnh đề đúng khi n = k + 1 .

b) * Với n = 1 : VT = VP = 2 => mệnh đề đúng khi n = 1

* Giả sử $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leq k+1$ (1)

=> $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k \leq \left(\frac{k+2}{k+1}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$

vì $\frac{k+2}{k+1} \le \frac{k+1}{k}$ <=> $k(k+2) \le (k+1)^2$ (đúng)

=> $\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} \le \left(\frac{k+2}{k+1}\right)(k+1)$ (do (1))

$\le k+2$

Vậy mệnh đề đúng khi n = k + 1 .

c) Giả sử $\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a^k+b^k}{2}$ => $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \frac{a+b}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \le \frac{a+b}{2}.\frac{a^k+b^k}{2}$

=> $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{a^{k+1}+b^{k+1}+ab^k+a^kb}{4}$ (1)

Ta chứng minh : $ab^k + a^kb \le a^{k+1} + b^{k+1} \Leftrightarrow a^k(a-b) + b^k(b-a) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^k - b^k) \ge 0$. Bất đẳng thức này đúng vì $a \ge b \ge 0 \Rightarrow a^k \ge b^k$

Và $0 \le a \le b \Rightarrow a^k \le b^k$.

Vậy (1) thành : $\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} \le \frac{2(a^{k+1}+b^{k+1})}{4} = \frac{a^{k+1}+b^{k+1}}{2}$ (dpcm)

3. 4. a) * Với n = 1 : $u_1 = 6^2 + 10.\ 3^1 = 66$ chia hết cho 11 .

* Giả sử $u_k = 6^{2k} + 10.3^k$ chia hết cho 11 , thế thì :

$u_{k+1} = 6^{2(k+1)} + 10.3^{k+1} = 36.6^{2k} + 30.3^k = 3(6^{2k} + 10.3^k) + 33.6^{2k} = u_k + 33.6^{2k}$

=> u_{k+1} chia hết cho 11 vì là tổng của hai số chia hết cho 11 .

b) Ta chứng minh : $u_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$ chia hết cho 24 .

* $u_1 = 1.2.3.4 = 24$ chia hết cho 24 .

* Giả sử $u_k = k(k+1)(k+2)(k+3)$ chia hết cho 24 , thế thì :

$u_{k+1} = (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = u_k + 4(k+1)(k+2)(k+3)$

Ta biết tích ba số nguyên liên tiếp (k + 1)(k + 2)(k + 3) luôn chí hết cho 6 vì có chứa một số chẵn và một số chia hết cho 3 . Do đó u_{k+1} là tổng hai số cho chia hết cho 24 nên chia hết cho 24.

c) * Với n = 1 : $u_1 = 6^1 + 8^1 = 14$ chia hết cho 14.

* Giả sử $u_k = 6^k + 8^k$ chia hết cho 14 , số lẻ tiếp theo số k là k + 2 , ta có :

$u_{k+2} = 6^{k+2} + 8^{k+2} = 36.6^k + 64.8^k = 36(6^k + 8^k) + 28.8^k = 36.u_k + 14.2.8^k$

=> u_{k+2} chia hết cho 14 ví là tổng hai số chia hết cho 14 .

d) * Với n = 1 : $u_1 = 5.\ 2^1 + 3^2 = 19$ chia hết cho 19 .

* Giả sử $u_k = 5.\ 2^{3k-2} + 3^{3k-1}$ chia hết cho 19 , thế thì :

$u_{k+1} = 5.\ 2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 5.\ 2^3.\ 2^{3k-2} + 3^3.\ 3^{3k-1} = 8.5.2^{3k-1} + 27.3^{3k-1}$

$= 8(5.2^{3k-1} + 3^{3k-1}) + 19.3^{3k-1} = 8.u_k + 19.3^{3k-1}$

=> u_{k+1} chia hết cho 19 vì là tổng của hai số chia hết cho 19.

3.5. * Với n = 1 : vị thần chỉ cần $2^1 - 1 = 1$ một động tác dời (đúng)

* Giả sử vị thần cần $2^k - 1$ động tác để dời k dĩa , thế thì với k + 1 dĩa , ta sẽ dời như sau :

- Dời k dĩa từ dĩa trên cùng đến dĩa kế chót sang mâm thứ hai : cần $2^k - 1$ động tác (giả thiết của phép quy nạp).
- Dời dĩa cuối cùng lớn nhất từ mâm thứ nhất sang mâm thứ ba : 1 động tác
- Dời k dĩa từ mâm thứ hai sang mâm thứ ba , dùng mâm thứ nhất làm trung gian : cần $2^k - 1$ động tác .

Vậy cần tất cả : $2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$ động tác

Suy ra dpcm .

Với 64 dĩa , vị thần cần thực hiện $2^{64} - 1$. Máy tính bỏ túi không tính được số này , chỉ cho ta một giá trị gần đúng là . 18.446.744.070.000.000.000.000.000.000 (19 số 0) . Mời bạn đọc số này ! Nếu mỗi động tác dời dĩa là một giây và luôn chính xác từ giờ này tới giờ kia , từ ngày này qua ngày khác, từ năm này qua năm tới … (thần mà !) , thì phải cần 584.942.417.400 năm !

§2. Dãy số

A. Tóm Tắt Giáo Khoa .

1. Định nghĩa : Một hàm số u xác định trên tập hợp N^* các số nguyên dương được gọi là một dãy số vô hạn .

Kí hiệu : số hạng tổng quát u(n) được kí hiệu là u_n : số hạng thứ n .

- Dãy số vô hạn u = u(n) được kí hiệu (u_n) hay $u_1 , u_2 , \ldots, u_n$.
- Khi $1 \le n \le m$, ta có dãy số hữu hạn : u_1 là số hạng đầu , u_m là số hạng cuối .

2. Cách cho dãy số :

- Cách 1 : Cho bởi công thức của số hạng tổng quát .
- Cách 2 : Cho bởi hệ thức truy hồi .

3. Dãy số tăng , giảm :

- (u_n) **dãy số tăng** $\Leftrightarrow \forall n , u_n < u_{n+1}$
- (u_n) **dãy số giảm** $\Leftrightarrow \forall n , u_n > u_{n+1}$

Chú ý : 1) (u_n) tăng $\Leftrightarrow \forall n , u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow \forall n , \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ (nếu $\forall n , u_n > 0$)

2) 1) (u_n) giảm $\Leftrightarrow \forall n , u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow \forall n , \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (nếu $\forall n , u_n > 0$)

4. Dãy số bị chặn :

- (u_n) **bị chặn trên** $\Leftrightarrow \exists M , \forall n , u_n \le M$
- $(u_n$ **bị chặn dưới** $\Leftrightarrow \exists m , \forall n , u_n \ge m$
- (u_n) **bị chặn** $\Leftrightarrow (u_n)$ bị chặn trên và chân dưới .

B. Giải Toán

Dạng 1 : Xác định các số hạng của dãy số :

Dùng công thức u_n hoặc hệ thức truy hồi

Ví dụ 1 :

a) Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n}{2^n}$. Tìm số hạng u_3 , u_4 .

b) Cho dãy số các số dương chia cho 5 dư 3 sắp xếp theo thứ tự tăng dần . Tìm số hạng thứ 1000.

Giải : a) $u_3 = \dfrac{3}{2^3} = \dfrac{3}{8}$, $u_4 = \dfrac{4}{2^4} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

b) Dãy số là 3, 8, 13 . . . Số hạng tổng quát là $u_n = 5(n-1) + 3 = 5n - 2 , \forall n \in N^*$. Vậy số hạng thứ 1000 là $u_{1000} = 5000 - 2 = 4998$.

Ví dụ 2 : Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = 2u_{n-1} - 3; \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tìm số hạng u_4 .

Giải : Ta có : $u_2 = 2.u_1 - 3 = 10 - 3 = 7$, $u_3 = 2u_2 - 3 = 14 - 3 = 11$, $u_4 = 2u_3 - 3 = 22 - 3 = 19$.

*** Dạng 2 : Xác định số hạng tổng quát của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi .**

Chương 3.Dãy số - Cấp số cộng . - Cấp số nhân

- Tính thử các số hạng đầu , dự đoán một hệ thức $u_n = f(n)$.
- Chứng minh hệ thức đó đúng với $\forall n$ bằng phương pháp quy nạp .

Ví dụ 3 : Cho dãy số (u_n) xác định bởi : $u_1 = 5$ và $\forall n \geq 2$, $u_n = 2u_{n-1} - 3$
Tìm số hạng tổng quát u_n .

Giải : Từ các giá trị của u_1 , u_2 , u_3 , u_4 đã tính trong ví dụ 2 , ta dự đoán :

$\forall n$, $u_n = 2^n + 3$ (1) vì hệ thức đúng khi n = 1 , 2, 3, 4 , nên ta hi vọng nó cũng đúng với mọi n.

- $u_1 = 2^1 + 3 = 5$: đúng
- Giả sử (1) đúng khi $n = k \Leftrightarrow u_k = 2^k + 3$, thế thì :

$u_{k+1} = 2u_k - 3$ (hệ thức truy hồi)

$= 2(2^k + 3) - 3 = 2^{k+1} + 3$, chứng tỏ (1) đúng khi n = k + 1 . Vậy (1) đúng với mọi n .

Dạng 3 : Chứng minh dãy số tăng giãm (xét tính đơn điệu) :

- Nếu dãy số xác định bằng công thức thì sữ dụng định nghĩa hoặc phần chú ý trong lý thuyết .
- Nếu dãy số xác định bằng hệ thức truy hồi , thì ta dùng định nghĩa + phép chứng minh quy nạp .

Ví dụ 4 : Xét tính tăng giãm của các dãy số (un) sau :

a) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ b) $u_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ c) $u_n = \dfrac{n^2+15}{n+1}$

Giải :

a) Ta có : $\forall n$, $u_n > 0$ và $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \dfrac{n+1}{3n} < 1, \ \forall n$. Vậy (u_n) là dãy số giãm .

b) Ta có : $u_n = \dfrac{2(n+2)-1}{n+2} = 2 - \dfrac{1}{n+2}$ (đơn giản công thức dãy số)

Suy ra , $\forall n$, $u_{n+1} - u_n = \left(2 - \dfrac{1}{(n+1)+2}\right) - \left(2 - \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} > 0$ nên dãy số (u_n) là dãy số tăng .

c) Ta có : $\dfrac{(n^2-1)+16}{n+1} = n - 1 + \dfrac{16}{n+1}$

=> $u_{n+1} - u_n = \left(n + \dfrac{16}{n+2}\right) - \left(n - 1 + \dfrac{16}{n+1}\right) = 1 + \dfrac{16}{n+2} - \dfrac{16}{n+1} = 1 - \dfrac{16}{(n+1)(n+2)}$

Hiệu số này âm khi n = 2 và dương khi n = 3 , do đó dãy số (u_n) không tăng cũng không giãm .

Thật ra nếu ta tính thử vài số hạng đầu tù công thức : $u_1 = 8$, $u_2 = \dfrac{19}{3}$; $u_3 = 6$, $u_4 = \dfrac{31}{5}$ thì có : $u_1 > u_2 > u_3 < u_4$. Vậy dãy số không tăng cũng không giãm .

* **Ví dụ 5 :** Cho dãy số (u_n) định bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 3u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Giải : Ta chứng minh $u_{n+1} - u_n > 0$ (1) , $\forall n$.

- $u_2 - u_1 = (1 + 3) - 1 = 3 > 0$ => (1) đúng khi n = 1 .
- Giả sử $u_{k+1} - u_k > 0$ (2) , thế thì :

$u_{k+2} - u_{k+1} = (u^2_{k+1} + 3u_{k+1}) - (u^2_k + 3u_k) = (u^2_{k+1} - u^2_k) + 3(u_{k+1} - u_k)$

$= (u_{k+1} - u_k)[(u_{k+1} + u_k) + 3]$

Từ hệ thức truy hồi , có thể chứng minh $u_n > 0$, $\forall n$, do đó suy ra :

$u_{k+1} + u_k + 3 > 0$, cùng với (2) , ta được : $u_{k+2} - u_{k+1} > 0$ => (1) đúng khi n = k + 1 .
Vậy (1) đúng với mọi n và dãy số (u_n) tăng .

Dạng 4 : Xét tính bị chặn

- Để chứng minh (u_n) bị chặn , ta tìm hai số M và m sao cho : $m \le u_n \le M$, $\forall n$.
- Nếu (u_n) cho bởi hệ thức truy hồi thì ta dự đoán số M, m rồi chứng minh tính bị chặn bằng phương pháp quy nạp.

Ví dụ 6 : Chứng minh các dãy số sau bị chặn

a) $u_n = \dfrac{3n+14}{n+2}$ b) $u_n = \dfrac{1}{n} + \cos n$ c) $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$, $\forall n \ge 1$

Giải : a) Ta có : $u_n = \dfrac{3(n+2)+8}{n+2} = 3 + \dfrac{8}{n+2}$

Vì $n \ge 1$ nên $0 < \dfrac{8}{n+2} \le \dfrac{8}{3}$, suy ra : $3 \le u_n \le 3 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{17}{3}$. Vậy (u_n) bị chặn .

Ghi chú : Lẻ dĩ nhiên , ta có thể viết "thóang " hơn là : $0 \le u_n \le 3 + 8 = 11$

b) Vì $0 < \dfrac{1}{n} \le 1$ và $-1 \le \cos n \le 1$, do đó : $0 - 1 \le \dfrac{1}{n} + \cos n \le 1 + 1$

tức : $-1 \le u_n \le 2$. Vậy (u_n) bị chặn .

c) *Ta tính thử vài giá trị đầu tiên của dãy số :* $u_1 = 1$, $u_2 = \dfrac{1}{2} + 2 = \dfrac{5}{2}$, $u_3 = \dfrac{5}{4} + 2 = \dfrac{13}{4}$, $u_4 = \dfrac{13}{8} + 2 = \dfrac{29}{8}$.

Ta dữ đoán $u_n < 4$, $\forall n$ và lẻ dĩ nhiên thì $u_n > 0$, $\forall n$.

1) Chứng minh : $u_n > 0$, $\forall n$

- $u_1 = 1 > 0$
- Giả sữ $u_k > 0$, thế thì : $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + 2 > 0$.

Vậy $u_n > 0$, $\forall n$ (1)

2) Chứng minh $u_n < 4$, $\forall n$.

- $u_1 = 1 < 4$
- Giả sữ $u_k < 4$, thế thì : $u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + 2 < \dfrac{1}{2}.4 + 2 = 4$.

Vậy $u_n < 4$, $\forall n$ (2)

Từ (1) và (2) , ta có (u_n) bị chặn .

C. Bài Tập Rèn Luyện

3.6. Chọn câu đúng : Số hạng thứ 9 của dãy số $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$ là :

a) 1, 9b) 2, 0 c) 2, 1 d) 3, 0

3.7 . Chọn câu đúng : Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = -15 \\ u_n = u_{n-1} + n \end{cases}$

Số hạng dương đầu tiên của dãy số là số hạng thứ mấy ?

a) 15 b) 4 c) 5 d) 6

3.8. Chọn câu đúng : Cho ba dãy số

(I) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$ (II) $u_n = (-1)^n n^2$ (III) $u_n = \dfrac{2^n}{n+1}$

Chương 3.Dãy số - Cấp số cộng . - Cấp số nhân

Dãy số nào là dãy số tăng ?

a) Chỉ (I) b) Chỉ (II)

c) Chỉ (III) d) Có 2 dãy số tăng trong ba dãy số

3.9. Chọn câu đúng : Cho ba dãy số

(I) $u_n = \frac{n-5}{2n+1}$ (II) $u_n = n^2 - 6n$ (III) $u_n = \frac{4^n + 2^n}{4^n - 2^n}$

Dãy số nào là dãy số giảm ?

a) Chỉ (I) và (II) b) Chỉ (II) và (III)

c) Chỉ (I) và (III) d) cả (I) , (II) và (III)

3.10. Chọn câu đúng : Cho ba dãy số

(I) $u_n = \frac{3n+5}{n+1}$ (II) $u_n = 2\sin n - n$ (III) $u_n = (-1)^n\ n^2$

Dãy số nào bị chận trên ?

a) Chỉ (I) và (II) b) Chỉ (II) và (III)

c) Chỉ (I) và (III) d) Cả (I) , (II) và (III)

3.11. Tìm 3 số hạng đầu tiên của dãy số sau :

a) $u_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$ b) $u_n = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \ldots + \frac{1}{n^2-1}$

c) $u_n = (-1)^n \cos\frac{n\pi}{4}$ d) $u_n = (-1)^1.1 + (-1)^2.2 + \ldots + (-1)^n n$

3. 12. Tìm các số hạng đầu tiên của dãy số sau rồi suy ra công thức $u_n = f(n)$ của các dãy số cho bởi hệ thức truy hồi :

a) $u_1 = 7$, $u_{n+1} = u_n + 4$, $\forall n \geq 1$ b) $u_1 = 4$, $u_{n+1} = 3.u_n - 2$, $\forall n \geq 1$

*** 3.13.** Cho dãy số (u_n) định bởi : $u_1 = -1$, $u_n = \sqrt{\frac{1+u_{n-1}}{2}}$, $\forall n \geq 2$.

a) Tính 3số hạng đầu tiên của dãy số .

b) Tìm công thức u_n theo n .

3.14. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n) sau :

a) $u_n = \frac{3n+7}{n+1}$ b) $u_n = \frac{n^2}{n+2}$ c) $u_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

d) $u_n = \frac{3^n}{(n+1)^2}$ e) $u_n = -n - \sin^2 n$ f) $u_n = n^3 - 3n^2 + 5n$

3.15. Xét tính đơn điệu của các dãy số (u_n) sau :

a) $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ b) $u_n = n + 2\sin n$

*c) $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ d) $u_n = \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$

3.16. Xét tính bị chận của các dãy số sau :

a) $u_n = \frac{3n-6}{2n+1}$ b) $u_n = \frac{2n^2+3}{n(n+1)}$ * d) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

* d) $u_n = -1 + 2 - 3 - ... + (-1)^n n$

*** 3.17. Cho dãy số (u_n) định bởi : $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$, $\forall n \geq 1$**

a) Chứng minh (u_n) giãm b) Chứng minh (u_n) bị chận .

*** 3.18. Cho dãy số (u_n) định bởi : $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$, $\forall n \geq 1$**

a) Chứng minh (u_n) là dãy số tăng

b) Tìm công thức u_n theo n .

*** 3.19. Cho dãy số (u_n) định bởi : $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_{n-1}}$, $\forall n \geq 1$.**

a) Chứng minh ; $u_n = tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall n$.

b) Suy ra tính đơn điệu và bị chận của (u_n)

*** 3.20. Cho dãy số (u_n) định bởi : $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \frac{(n+2)u_n}{2n}$, $\forall n \geq 1$.**

a) Chứng minh $u_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$, $\forall n$.

b) Xét tính đơn điệu và bị chận của (u_n)

D.Hướng dẫn – Đáp số .

3.6. (a) Thế n = 9 vào công thức : $u_9 = \frac{19}{10} = 1{,}9$

3.7 .(d) $u_2 = -15 + 2 = -13$, $u_3 = -13 + 3 = -10$, $u_4 = -10 + 4 = -6$, $u_5 = -6 + 5 = -1$, $u_6 = -1 + 6 = 5$ **.**

Vậy số hạng dương đầu tiên là số hạng thứ 6 ,

3.8. (c) * Xét (I) **:** $u_n = 2 + \frac{3}{n+1}$ => n càng lớn u_n càng nhỏ => (u_n) giãm .

* Xét (II) : $u_1 = -1$; $u_2 = 4$; $u_3 = -9$ => (u_n) không tăng , không giãm .

Vậy chon (III)

* Nếu xét (II) thì : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{n+2} > 1$ => (u_n) tăng .

3.9 . (c) * Xét (I) : $u_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{11}{2n+1})$ => n càng lớn thì $\frac{11}{2n+1}$ càng nhỏ => (u_n) càng nhỏ => (u_n) giãm .

* Xét (II) : $u_1 = -5$; $u_2 = -8$; $u_{10} = 40$ => (u_n) không tăng , không giãm

* Xét (III) : $u_n = \frac{2^n+1}{2^n-1} = 1 + \frac{2}{2^n-1}$ => n càng lớn thì u_n càng nhỏ => (u_n) giãm

3.10. (a) * Xét (I) : $u_n = 3 + \frac{2}{n+1} \leq 4$ => (u_n) bị chận trên .

* Xét (II) : Vì $-n \leq -1$ và $2\sin n \leq 2$ nên $u_n \leq 1$=> (u_n) bị chận trên

* Xét (III) : Khi n là số chẩn vô cùng lớn thì u_n là số vô cùng lớn , do đó (u_n) không bị chận trên .

3.11. a) $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{3}{2}$

Chương 3.Dãy số - Cấp số cộng . - Cấp số nhân

b) $u_1 = \frac{1}{2^2-1} = \frac{1}{3}$, $u_2 = u_1 + \frac{1}{3^2-1} = \frac{11}{24}$, $u_3 = u_2 + \frac{1}{4^2-1} = \frac{21}{40}$

c) $u_1 = (-1)\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_2 = (1).\cos\frac{\Pi}{2} = 0$, $u_3 = (-1)\cos\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $u_1 = (-1).1 = -1$, $u_2 = u_1 + (1).2 = 1$, $u_3 = u_2 + (-1)3 = -2$

3.12. a) $u_1 = 7$, $u_2 = 11$, $u_3 = 15$ . . .(Nhận xét : *Các số có tính chất chung là chia cho 4 dư số là 3 : $u_1 = 4.1 + 3$, $u_2 = 4.2 + 3$, $u_3 = 4.3 + 3$*) Ta chứng minh : $u_n = 4n + 3$ (1)

- $u_1 = 4.1 + 3$: (1) đúng khi n = 1 .
- Giả sử $u_k = 4.k + 3$, thế thì :

$u_{k+1} = u_k + 4$ (giả thiết của quy nạp)

$= (4k + 3) + 4 = 4(k + 1) + 3$: (1) đúng khi n = k + 1

Vậy (1) được chứng minh .

b) $u_1 = 4$, $u_2 = 3.4 - 2 = 10$, $u_3 = 3.10 - 2 = 28$. *Nhận xét : $u_1 = 3^1 + 1$, $u_2 = 3^2 + 1$, $u_3 = 3^3 + 1$* . Ta chứng minh : $u_n = 3^n + 1$ (1) , $\forall n$

- $u_1 = 3^1 + 1$: (1) đúng khi n = 1 .
- Giả sử $u_k = 3^k + 1$, thế thì :

$u_{k+1} = 3u_k - 2$ (giả thiết của quy nạp)

$= 3(3^k + 1) - 2 = 3^{k+1} + 1$: (1) đúng khi n = k + 1

Vậy (1) được chứng minh .

3.13. a) $u_1 = -1$, $u_2 = 0$, $u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) *Nhận xét $u_1 = \cos\ \pi$, $u_2 = \cos\frac{\pi}{2}$, $u_3 = \frac{\Pi}{4}$*. Ta chứng minh : $u_n = \cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$ (1) , $\forall n$

- $u_1 = \cos\frac{\pi}{2^0} = \cos\ \pi = -1$: (1) đúng khi n = 1 .
- Giả sử $u_k = \cos\frac{\pi}{2^{k-1}}$, thế thì :

$$u_{k+1} = \sqrt{\frac{1+u_k}{2}} \text{ (giả thiết của quy nạp)}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\frac{\Pi}{2^k}}{2}} \text{ (công thức } 1 + \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} \text{)}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2^k} : \text{(1) đúng khi } n = k + 1$$

Vậy (1) được chứng minh .

3.14. a) Ta có : $u_n = \frac{3(n+1)+4}{n+1} = 3 + \frac{4}{n+1}$

Suy ra : $u_{n+1} - u_n = \left(3 + \frac{4}{n+2}\right) - \left(3 + \frac{4}{n+1}\right) = \frac{-4}{(n+2)(n+1)} < 0$, $\forall n$. Vậy (u_n) là dãy số giảm.

b) Ta có : $u_n = \frac{(n^2-4)+4}{n+2} = n - 2 + \frac{4}{n+2}$

Suy ra : $u_{n+1} - u_n = [(n+1) - 2 + \frac{4}{n+3}] - [n - 2 + \frac{4}{n+2}] = 1 + \frac{-4}{(n+3)(n+2)} > 0$ vì $(n+3)(n+2) > 4$, $\forall n \geq 1$.

Vậy (u_n) là dãy số tăng .

c) Ta có : $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.

Suy ra : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} > 0,\ \forall n$.

d) Vì mọi $u_n > 0$ nên $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3(n+1)^2}{(n+2)^2} > 1 \Leftrightarrow 3(n+1)^2 > (n+2)^2 \Leftrightarrow 2n^2 + 2n - 1 > 0$

$\Leftrightarrow 2n^2 + n + (n-1) > 0$: đúng với $\forall n \geq 1$. Vậy (u_n) tăng.

e) Ta có : $u_{n+1} - u_n = u_n = [\,-n - 1 - \sin^2(n+1)] - [\,-n - \sin^2 n\,]$

$= -\sin^2(n+1) - (1 - \sin^2 n) = -\sin^2(n+1) - \cos^2 n < 0, \forall n$. Vậy (u_n) giảm .

f) $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^3 - n^3] - 3[(n+1)^2 - n^2] + 5[(n+1) - n]$

$= (3n^2 + 3n + 1) - 3(2n+1) + 5$

$= 3n^2 - 3n + 3 = 3n(n-1) + 3 > 0,\ \forall n \geq 1$

Vậy (u_n) giảm .

3.15. a) u_n là tổng của n số hạng , u_{n+1} có n + 1 số hạng .

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

Vậy (u_n) tăng .

b) Ta có : u_1 □ 2,7 , u_2 □ 3,8 , u_3 □ 3,3 . Vậy dãy số (u_n) không tăng cũng không giảm .

c) $u_n = 1 - \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \Rightarrow u_{n+1} = 1 - \dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \dfrac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = 2.\ \dfrac{\sqrt{n(n+2)} - \sqrt{(n+1)^2}}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}$

Hiệu số này âm vì $n(n+2) < (n+1)^2$. Vậy (u_n) là dãy số giảm .

d) Ta có : $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = -\dfrac{1}{3}$, $u_4 = 0$: vậy (u_n) không tăng cũng không giảm .

3.16. a) Ta có : $u_n = \dfrac{3n-6}{2n+1} = \dfrac{\frac{3}{2}(2n+1) - \frac{15}{2}}{2n+1} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{15}{2(2n+1)}$

Vì $n \geq 1$ nên $0 \leq \dfrac{15}{2(2n+1)} \leq \dfrac{15}{6}$. Suy ra : $\dfrac{3}{2} - \dfrac{15}{6} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2}$ => (u_n) bị chặn .

Ghi chú : Ta có thể giải "thoáng" hơn như sau :

$u_n < \dfrac{4n+2}{2n+1}$ *vì* $-6(2n+1) < 3n - 6 < 4n + 26$ *(quá hiển nhiên !)*

=> $-6 < u_n < 2$

b) Ta có : $0 < 2n^2 + 3 < 3n(n+1)$ => $0 < u_n < 3$ => (u_n) bị chặn .
Ghi chú : Ta chia tử cho mẫu và làm như câu (a) .

c) Ta có $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0$, $\forall n$ => (u_n) bị chặn dưới .
Mặt khác : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$ vì $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} > 1$ => (u_n) bị chặn trên
Suy ra (u_n) bị chặn .

d) Nếu n = 2k : $u_n = (-1+2) + (-3+4) + \ldots + (-2k+1+2k) = k$ (tổng k số hạng mỗi số hạng bằng – 1)
Nếu n = 2k – 1 : $u_n = -1 + (2-3) + (4-5) + \ldots + (2k-2-2k+1) = -1-(k-1) = -k$
Ví dụ : $u_{1000} = 500$, $u_{2007} = -1003$. Vậy (u_n) không bị chặn trẹn cũng không bị chặn dưới .

*** 3.17..** a) Có thể chứng minh $u_n > 0$, $\forall n$.
Ta chứng minh : $u_{n+1} - u_n > 0$ (1) , $\forall n \geq 1$ băng phương pháp quy nạp .

- $u_2 - u_1 = \dfrac{4}{3} - 1 > 0$: (1) đúng khi n = 1
- Giả sử $u_{k+1} - u_k > 0$, thế thì : $u_{k+2} - u_{k+1} = \left(\dfrac{1}{3}u_{k+1} + 1\right) - \left(\dfrac{1}{3}u_k + 1\right)$

$$= \frac{1}{3}(u_{k+1} - u_k) . 0$$

Vậy (1) đúng , $\forall n$.

b) Nhận xét bằng cách tính các giá trị đầu tiên , ta chứng minh $u_n < 2$, $\forall n$ bằng phương pháp quy nạp .

- $u_1 = 1 < 1$
- Giả sử $u_k < 2$, thế thì $u_{k+1} = \dfrac{1}{3}u_k + 1 < \dfrac{1}{3}.2 + 1 < 2$

Ghi chú : Ta có thể chứng minh : $u_n < \dfrac{3}{2}$

*** 3.18.** a) Giải tương tự như bài 8 .
b) Ta chứng minh $u_n = 2^n - 1$ tương tự như ví dụ 3 .

*** 3.19.** a) $u_n = tg\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ (1) , $\forall n$

- $u_1 = tg\dfrac{\pi}{4}$: (1) đúng khi n = 1
- Giả sử $u_k = tg\dfrac{\pi}{2^{k+1}}$, thế thì : $u_{k+1} = \dfrac{\sqrt{1+tg^2\dfrac{\pi}{2^{K+1}}} - 1}{2} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{K+1}}} - 1}{2tg\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}$

$$= \frac{1-\cos\dfrac{\pi}{2^{k+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{k+1}}} = \frac{2\sin^2\dfrac{\pi}{2^{k+2}}}{2\sin\dfrac{\pi}{2^{k+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{k+2}}} = tg\frac{\pi}{2^{k+2}}$$. Vậy (1) đúng khi n = k + 1

Vậy $u_n = tg\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall n$.

b) Vì $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} < \frac{\pi}{4}$ và hàm số tg x đồng biến trên (0 ; π/4) nên dãy số (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi số tg0 = 0 và bị chặn trên bởi số $tg\frac{\pi}{4} = 1$.

3.20. a) Chứng minh $u_n = \frac{n(n+1)}{2^n}$ (1) , $\forall n$.

* $u_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2^1}$ => (1) đúng khi n = 1

* Giả sử $u_k = \frac{k(k+1)}{2^k}$ => $u_{k+1} = \frac{(k+2)}{2k}.\frac{k(k+1)}{2^k} = \frac{(k+1)(k+2)}{2^{k+1}}$

=> (1) đúng khi n + k + 1 .

Vậy (1) đúng , $\forall n$

b) * $u_1 = 1$; $u_2 = u_3 = \frac{3}{2}$ => (u_n) không tăng , cũng không giảm.

* Dễ thấy $u_n > 0$, $\forall n$.

Ta chứng minh $u_n \le 2$, $\forall n$.

- $u_1 = 1 \le 2$
- $u_k \le 2 \Rightarrow u_{k+1} \le \frac{(k+2)}{2k}.2 \le 2$